

М.С. Горобей, Ю.Ф. Булгаков, И.А. Шайхлисламова, С.А. Алексеенко

## **РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАСПЫЛЕННОЙ ВОДЫ С ЧАСТИЦАМИ УГОЛЬНОЙ ПЫЛИ**

*Приведены теоретические исследования и разработана математическая модель процесса взаимодействия распыленной воды с частицами угольной пыли. Полученные результаты позволяют раскрыть механизм взаимодействия распыленной жидкости с угольной пылью и могут быть использованы при разработке новых эффективных средств пылеподавления в шахтах.*

---

### **РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ АЕРОДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ РОЗПИЛЕНОЇ ВОДИ З ЧАСТИНКАМИ ВУГІЛЬНОГО ПИЛУ**

*Наведено теоретичні дослідження та розроблена математична модель процесу взаємодії розпиленої води з частинками вугільного пилу. Отримані результати дозволяють розкрити механізм взаємодії розпиленої рідини з вугільним пилом і можуть бути використані при розробці нових ефективних засобів пилоподавлення в шахтах.*

---

### **DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL FOR AERODYNAMIC INTERFERENCE OF SPRAYED WATER WITH COAL DUST PARTICLES**

*In this work, there were presented the theoretical studies and as a result it has been developed the mathematical model of process for interference of sprayed water with coal dust particles. The results allow to reveal the mechanism of the interaction of sprayed water with coal dust and they can be used to develop new and effective ways of dust suppression in minings.*

---

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Борьба с угольной пылью в горных выработках шахт Донбасса, как основным источником взрывов и профессиональных заболеваний шахтеров, была и остается сложной научной и важной прикладной задачей. Для решения указанной задачи в нашей стране и за рубежом проводятся целенаправленные исследования по пылеподавлению с применением распыленной во-

ды. При этом многими авторами, например, [1 – 5] и организациями, такими как МакНИИ, НИИГД («Респиратор»), УкрНИМИ, ДонНТУ, НГУ, разработан ряд способов и технических средств по использованию воды. Апробированы также методики по улучшению свойств распыленной воды, например, за счет ее предварительной электризации положительным или отрицательным зарядом, а также использования различных добавок поверхно-

стно-активных веществ (ПАВ) для снижения поверхностного натяжения воды. Все исследования в этом направлении доведены до научно-обоснованных нормативных документов, которые внедрены и позволяют осуществлять на угольных шахтах мероприятия по пылеподавлению и предупреждению взрывов. Однако ни один из известных способов и средств гидрообеспыливания не обеспечивают снижение запыленности воздуха до санитарных норм и не могут защитить шахтеров от опасности заболеваний пылевой этиологии. Для корректного описания процессов пылеподавления необходимо разработать адекватную математическую модель процесса. При этом по аналогии с подходом, изложенным в [1], будем считать, что взвешенная пыль и диспергированная вода представляют собой отдельные частицы, движущиеся в вентиляционном потоке.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Выберем оси координат (рис. 1), где  $x$  – продольная координата вдоль движения вентиляционного потока с началом в месте образования пылевого облака (например, расположения комбайна) или от места расположения водяного факела, а  $y$  – поперечная координата снизу-вверх с началом у почвы выработки.

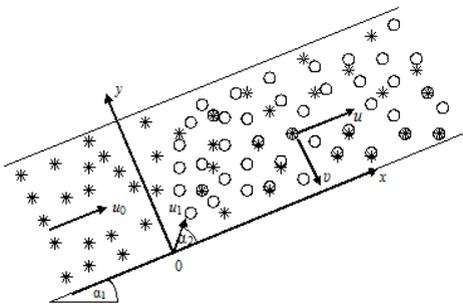


Рис. 1. Схема движения и механического взаимодействия распыленной жидкости (кружочки) с угольной пылью (звездочки) в наклонной выработке

В проекциях на оси координат уравнение движения частиц пыли или капель жидкости представим в виде [6]

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g \sin \alpha_1 - \frac{6}{\rho \pi d_i^3} W_x; \\ \frac{dv}{dt} &= -g \cos \alpha_1 - \frac{6}{\rho \pi d_i^3} W_y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$ ,  $v$  – проекции вектора скорости на оси координат, м/с;

$g$  – ускорение силы тяжести, (9,81 м/с<sup>2</sup>);

$\alpha_1$  – угол наклона выработки к горизонту, град;

$\rho$  – плотность частицы или капли (обычно принимается равной 1300 кг/м<sup>3</sup> – для частиц угольной пыли и 1000 кг/м<sup>3</sup> – для воды);

$d_i$  – диаметр  $i$ -й частицы или капли, м;

$W_x$ ,  $W_y$  – проекции вектора силы сопротивления движению, Н

Считается, что силы сопротивления движению тела в воздухе пропорциональны кинетической энергии относительного движения и площади сечения тела [7].

Эта зависимость в проекциях на оси координат с учетом знака направления движения (по потоку или против него) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} W_x &= c_x \frac{\pi d_i^2}{4} \frac{\rho_0 |u \pm u_0| (u \pm u_0)}{2}; \\ W_y &= c_y \frac{\pi d_i^2}{4} \frac{\rho_0 |v| v}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_x$ ,  $c_y$  – проекции коэффициента сопротивления на оси координат;

$\rho_0$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;

$u_0$  – скорость вентиляционного потока, м/с.

В векторной форме эта зависимость может быть представлена в виде

$$\vec{W} = c_n \frac{\pi d_i^2}{4} \frac{\rho_0 |\vec{U}| \vec{U}}{2}, \quad (3)$$

где  $c_n$  – коэффициент сопротивления, зависящий от скорости и диаметра частиц или капель.

Подставляя выражения (2) в систему уравнений (1), получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g \sin \alpha - \frac{3\rho_0 c_x}{4\rho d_i} |u \pm u_0| (u \pm u_0); \\ \frac{dv}{dt} &= -g \cos \alpha - \frac{3\rho_0 c_x}{4\rho d_i} |v| v. \end{aligned} \quad (4)$$

Добавим к уравнениям системы (3) начальные условия, исходя из того, что частицы или капли в месте их образования приобретают под углом наклона к почве выработки скорость, не совпадающую со скоростью воздуха

$$u(0) = u_1 \cos \alpha_2. \quad v(0) = u_1 \sin \alpha_2. \quad (5)$$

На рис. 2 приведены расчетные данные (значения величин обозначены ромбиками) и экспериментальные данные [7] (значения величин обозначены прямоугольниками) зависимости коэффициента сопротивления движению тел шаровидной формы от локального числа Рейнольдса при переходе от ламинарного режима к турбулентному. Под локальным числом Рейнольдса [1] подразумевается отношение динамических сил частицы или капли жидкости к силам вязкости воздуха

$$Re_x = \frac{|u - u_0| d_i}{\nu}; \quad Re_y = \frac{|v| d_i}{\nu}.$$

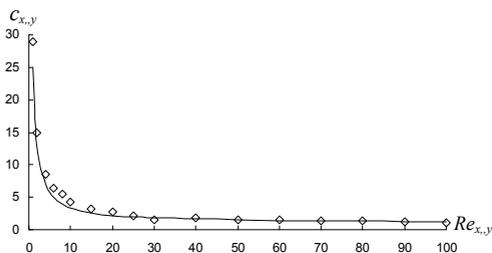


Рис. 2. Зависимость коэффициента сопротивления движению тел шаровидной формы от локального числа Рейнольдса при переходе от ламинарного к турбулентному режиму

Максимальная погрешность расчетных данных, как показали сравнения с экспериментальными данными, не превышает 10 – 20%. Анализ возможных значений локального числа Рейнольдса показывает, что оно может меняться в широких пределах. Так, принимая минимальный диаметр  $d_{min} = 1$  мкм и минимальную скорость  $u_{min} = 0,1$  м/с, получим  $Re = 0,007$ . А принимая максимальный диаметр  $d_{max} = 1000$  мкм и максимальную скорость  $u_{min} = 100$  м/с [2], получим  $Re = 6667$ .

Подставляя формулу (3) в уравнения (4), учтем все возможные режимы движения и получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g \sin \alpha - \frac{3\rho_0}{8\rho d_i} \left[ |u \pm u_0| + \frac{48\nu}{d_i} \right] (u \pm u_0); \\ \frac{dv}{dt} &= -g \cos \alpha - \frac{3\rho_0}{8\rho d_i} \left[ |v| + \frac{48\nu}{d_i} \right] v. \end{aligned} \quad (6)$$

Найдем предельные значения проекций скорости движения частиц или капель, полагая производные в уравнениях (6) равными нулю

$$\begin{aligned} a_2 (u_2 \pm u_0)^2 - a_1 (u_2 \pm u_0) - g \sin \alpha_1 &= 0; \\ a_2 v_2^2 - a_1 v_2 - g \cos \alpha_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $u_2$  и  $v_2$  – проекции предельной скорости движения на оси координат, м/с.

В уравнениях (7) учтен знак предельной относительной скорости (продольной и вертикальной – со знаком «минус») и поэтому отброшен модуль скорости. Для простоты записи в уравнение (7) введены коэффициенты

$$a_1 = \frac{18\mu_0}{\rho d_i^2}; \quad a_2 = \frac{3\rho_0}{8\rho d_i}. \quad (8)$$

Здесь  $\mu_0 = \rho_0 \nu$  – динамическая вязкость воздуха, кг/(м·с).

Решая алгебраические уравнения второго порядка (6), найдем предельные значения проекций скорости

$$u_2 = \mp u_0 - \frac{2g \sin \alpha_1}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2 g \sin \alpha_1}}; \quad (9)$$

$$v_2 = \frac{-2g \cos \alpha_1}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2 g \cos \alpha_1}}.$$

Из формулы (8) следует, что при  $a_2 = 0$  режим движения ламинарный, а при  $a_1 = 0$  – турбулентный.

На рис. 3 представлена, установленная по второй формуле (9), зависимость предельной вертикальной скорости от диаметра частиц или капель. Из рис. 3 следует, что пользоваться законом Стокса при оценке вертикальной скорости движения можно только при диаметрах частиц или капель менее 200 мкм. Тем более нельзя применять закон Стокса для продольной скорости в активной зоне действия факела, где локальные числа Рейнольдса, как уже отмечалось, могут составлять несколько тысяч.

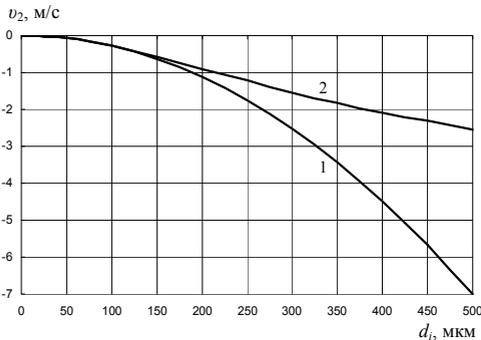


Рис. 3. Зависимость предельной вертикальной скорости движения частицы или капли от ее диаметра при ламинарном (кривая 1) и смешанном (кривая 2) режимах

Решения системы уравнений (6) с начальными условиями (4) будем искать методом разделения переменных, предварительно отбрасывая модули и учитывая вместо них знаки, представив систему в виде

$$\frac{d(u-u_0)}{\pm a_2(u-u_0)^2 + a_1(u-u_0) + g \sin \alpha_1} = -dt; \quad (10)$$

$$\frac{dv}{\pm a_2 v^2 + a_1 v + g \cos \alpha_1} = -dt.$$

Для первого уравнения системы (10), поскольку  $(u \pm u_0) > 0$ , решение с первым начальным условием (4) можно представить в виде [8]

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_x}} \left[ \ln \left( \frac{2a_2(u \pm u_0) + a_1 - \sqrt{\Delta_x}}{2a_2(u \pm u_0) + a_1 + \sqrt{\Delta_x}} \right) - \ln \left( \frac{2a_2(u_1 \cos \alpha_2 \pm u_0) + a_1 - \sqrt{\Delta_x}}{2a_2(u_1 \cos \alpha_2 \pm u_0) + a_1 + \sqrt{\Delta_x}} \right) \right]. \quad (11)$$

Дискриминант уравнения  $\Delta_x$  равен

$$\Delta_x = a_1^2 - 4a_2 g \sin \alpha_1 = \left( \frac{18\mu_0}{\rho d_i^2} \right)^2 - \frac{3\rho_0}{2\rho d_i} g \sin \alpha_1. \quad (12)$$

Из выражения (11) следует, что для горизонтальных выработок дискриминант всегда положителен, а для наклонных выработок ( $\alpha_1 \leq 30^\circ$ ) дискриминант положителен при диаметрах частиц или капель меньших 300 мкм, если принять  $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $\mu_0 = 1,95 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$ . Оценка величин алгебраических слагаемых, входящих в дискриминант, показывает, что  $a_1^2 \gg 4a_2 g \sin \alpha_1$ , тем более для горизонтальных выработок. Поэтому можно принять  $\Delta \approx a_1^2$ . В этом случае формула (12), решенная относительно скорости, принимает вид

$$u(t) = u_0 + \frac{(u_1 \cos \alpha_2 - u_0) \exp(-a_1 t)}{1 + Re_x [1 - \exp(-a_1 t)] / 48}, \quad (13)$$

где  $Re_x$  – локальное число Рейнольдса.

$$Re_x = 48(u_1 \cos \alpha_2 \pm u_0) a_2 / a_1 = (u_1 \cos \alpha_2 \pm u_0) d_i / \nu. \quad (14)$$

Анализ зависимости (13) показывает, что продольная составляющая скорости движения частицы пыли или капли жидкости меняется от своего первоначального значения до предельного, совпадающего со скоростью воздуха. Эти изменения в большей степени зависят от локального числа Рейнольдса. Как видно из рис. 4, чем больше начальная скорость при одном и том же диаметре частицы или капли, тем быстрее падает относительная скорость.

Поэтому частицы пыли с их небольшими начальными скоростями и малыми диаметрами будут находиться в области ламинарного режима движения (рис. 4,  $Re_x = 1$ ), а капли жидкости – в области турбулентного и переходного режимов (рис. 4,  $Re_x = 100$  и  $1000$ ).

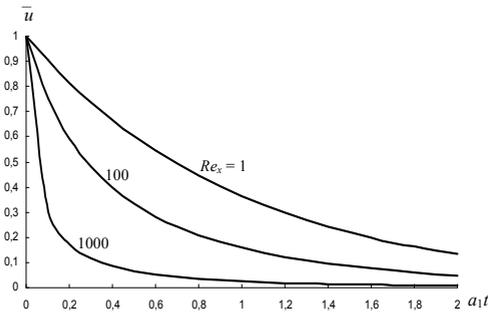


Рис. 4. Изменения во времени продольной относительной скорости движения частицы пыли или капли жидкости при разных локальных числах Рейнольдса

Здесь относительная скорость означает

$$\bar{u} = \frac{u - u_0}{u_1 \cos \alpha_2 - u_0}.$$

Рассмотрим дискриминант во втором уравнении (12), который при  $v > 0$  равен

$$\begin{aligned} \Delta_y &= a_1^2 - 4a_2 g \cos \alpha_1 = \\ &= \left( \frac{18\mu_0}{\rho d_i^2} \right)^2 - \frac{3\rho_0}{2\rho d_i} g \cos \alpha_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Анализ порядка величин первого и второго слагаемых показывает, что при  $v > 0$  дискриминант может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от диаметра частиц или капель. Так, если принять  $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $\mu_0 = 1,95 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$ ;  $\cos \alpha_1 < 1$ , то дискриминант положительный при  $d_i < 200 \text{ мкм}$ , а при больших диаметрах – отрицательный. В то же время дискриминант всегда положительный при  $v < 0$ , когда после взлета начинается падение частицы или капли.

В этом случае решение второго уравнения (10) со вторым начальным условием (4) представим в виде [8]

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta_y}} \left[ \ln \frac{2a_2 u_1 \sin \alpha_2 + a_1 - \sqrt{\Delta_y}}{2a_2 u_1 \sin \alpha_2 + a_1 + \sqrt{\Delta_y}} - \ln \frac{2a_2 v + a_1 - \sqrt{\Delta_y}}{2a_2 v + a_1 + \sqrt{\Delta_y}} \right], & \text{если } \Delta_y > 0; \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta_y}} \left[ \text{arctg} \frac{2a_2 u_1 \sin \alpha_2}{\sqrt{-\Delta_y}} - \text{arctg} \frac{2a_2 v}{\sqrt{-\Delta_y}} \right], & \text{если } \Delta_y < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Решив формулы (16) относительно вертикальной скорости, получим

$$v(t) = \begin{cases} \frac{(a_1 + \sqrt{\Delta_y}) A \exp(-\sqrt{\Delta_y} t) - a_1 + \sqrt{\Delta_y}}{2a_2 [1 - A \exp(-\sqrt{\Delta_y} t)]}, & \text{если } \Delta_y > 0; \\ \frac{\sqrt{-\Delta_y}}{2a_2} \operatorname{tg} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2a_2 u_1 \sin \alpha_2}{\sqrt{-\Delta_y}} - \frac{\sqrt{-\Delta_y} t}{2} \right], & \text{если } \Delta_y < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь для сокращения записи введен безразмерный коэффициент

$$A = \frac{2a_2 u_1 \sin \alpha_2 + a_1 - \sqrt{\Delta_y}}{2a_2 u_1 \sin \alpha_2 + a_1 + \sqrt{\Delta_y}}. \quad (18)$$

На рис. 5 приведены результаты расчета по формулам (13) и (17) изменения во времени продольной и вертикальной составляющих скорости движения частицы или капли в горизонтальной выработке.

Исходные данные при расчете приняты следующими: динамическая вязкость воздуха  $\mu_0 = 1,95 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с); кинематическая вязкость воздуха  $\nu = 1,3 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с; угол наклона факела, расположенного у почвы, к горизонту  $\alpha_2 = 45^\circ$ ; плотность воздуха  $\rho_0 = 1,3$  кг/м<sup>3</sup>; плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>; скорость воздуха  $u_0 = 1$  м/с; начальная скорость капель жидкости  $u_1 = 30$  м/с; средний диаметр капель жидкости  $d_k = 200$  мкм.

Из рис. 5 видно, что спустя чуть более 0,2 с продольная скорость падает и сравнивается со скоростью воздуха, а вертикаль-

ная скорость становится отрицательной.

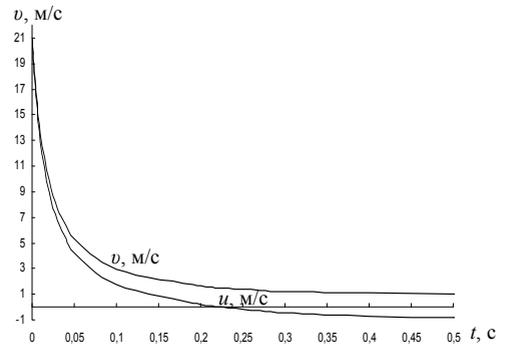


Рис. 5. Изменение во времени продольной и вертикальной составляющих скорости движения капель жидкости в горизонтальной выработке после их вылета из форсунки под углом  $45^\circ$

Поскольку для практического применения ( $d_k \leq 200$  мкм) в основном потребуются первая формула (17), проинтегрируем ее с учетом (4), а также формулу (13) по времени. Тогда для определения координат местонахождения частицы или капли получим

$$\begin{aligned} x(t) &= u_0 t + \frac{48(u_1 \cos \alpha_2 - u_2)}{a_1 Re_x} \ln[1 + Re_x [1 - \exp(-a_1 t)] / 48]; \\ y(t) &= v_2 t + \frac{1}{a_2} \ln \frac{1 - A \exp(-\sqrt{\Delta_y} t)}{1 - A} \end{aligned} \quad (19)$$

Зная координаты местонахождения капель жидкости можно определить траектории их полета.

На рис. 6 представлены результаты расчета положения капли жидкости диа-

метром 100 мкм над почвой выработки в зависимости от расстояния до форсунки при начальной высоте  $h_i = 1$  м и угле наклона форсунки к горизонту  $0^\circ$ . Там же нанесена штриховая линия, указывающая на

то, что положение частицы пыли диаметром 10 мкм почти не меняется на указанной длине.

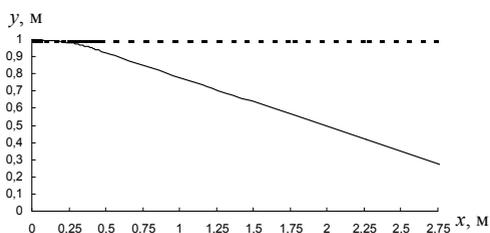


Рис. 6. Положение капли жидкости диаметром 100 мкм (сплошная линия) и частицы пыли диаметром 10 мкм (штриховая линия) над почвой выработки в зависимости от расстояния до форсунки

Из рис. 6 следует, что капля жидкости сначала сохраняет прямолинейный путь



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смачивание пыли и контроль запыленности воздуха в шахтах / [Р.Р. Кудряшов, Л.Д. Воронина, М.К. Шуринова и др.]. – М.: Наука, 1984. – 196 с.
2. Физико-химические основы гидрообеспыливания и предупреждения взрывов угольной пыли / [Саранчук В.И., Качан В.Н., Рекун В.В. и др.]. – К.: Наукова думка, 1984. – 216 с.
3. Медников Е.П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей / Медников Е.П. – М.: Наука, 1980. – 176 с.
4. Ищук И.Г. Средства комплексного обеспыливания горных предприятий. Справочник / И.Г. Ищук, Г. А. Поздняков. – М.: Недра, 1991. – 223 с.
5. Борьба с угольной и породной пылью в шахтах / [Петрухин П.М. и др.]. – М.: Недра, 1981. – 271 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л.Г. – М.: Наука, 1970. – 914 с.
7. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Седов Л.И. – М.: Наука, 1967. – 428 с.

движения, а затем начинает приближаться под действием сил тяжести к почве выработки, в то время как частица пыли остается примерно на той же высоте.

Очевидно, максимальная дальность полета капля жидкости будет достигнута при расположении сопла форсунки под углом к почве выработки с тем, чтобы первоначальные потери жидкости на почве были минимальными.

## ВЫВОДЫ

Полученные результаты позволяют раскрыть механизм взаимодействия распыленной жидкости с угольной пылью и могут быть использованы при разработке новых эффективных средств пылеподавления.

8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

## ОБ АВТОРАХ

Горобей Марина Сергеевна – аспирант кафедры охраны труда и аэрологии Донецкого национального технического университета.

Булгаков Юрий Федорович – д.т.н., заведующий кафедрой охраны труда и аэрологии Донецкого национального технического университета.

Шайхлисламова Ирина Анатольевна – к.т.н., доцент кафедры аэрологии и охраны труда Национального горного университета.

Алексеев Сергей Александрович – к.т.н., доцент кафедры аэрологии и охраны труда Национального горного университета.

